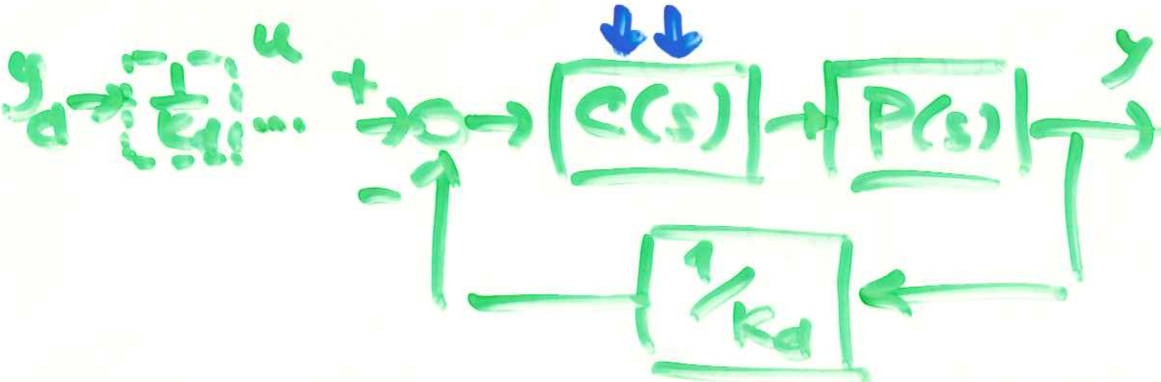
SINTESI (per tentativi) NEL DOMINIO DI LAPLACE



$C(s) = \frac{K_c}{s^h} R(s)$ $\qquad$ $R(j\omega) \Rightarrow$ approccio in frequenza

r. perm. $\qquad$ trans.

$G(s) = P(s)\,C(s)$ $\qquad$ $F(s) = \frac{1}{K_d}\,G(s)$

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{G(s)}{1+F(s)}\,\frac{K_d}{K_d} = K_d \underbrace{\frac{F(s)}{1+F(s)}}_{y/y_d}$$

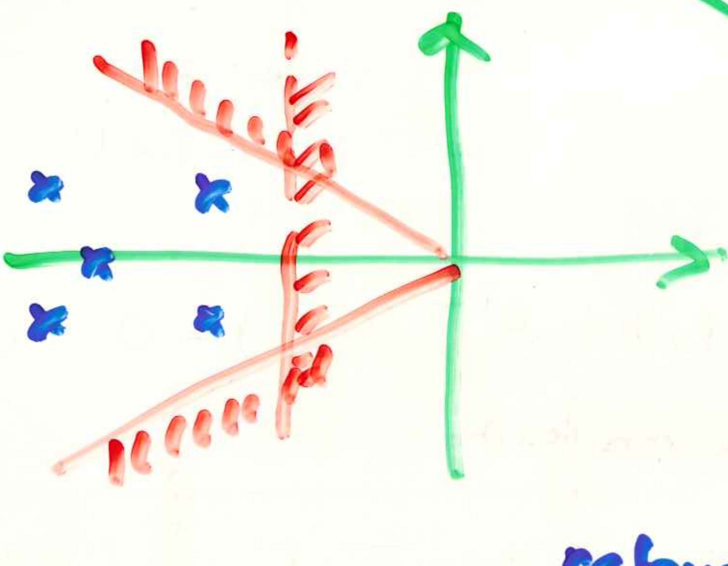
- spec. a reg. permanente ✓ $\quad$ Si trattano come prima
- " sul transitorio → localizzazione dei poli ad anello chiuso

↓

approccio in s

↑

catena diretta (processo) è INSTABILE !!



$$F(s) = K' \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

forma "poli-zeri"

$n \geq m$

$K' \neq K_F$

ad es., se F non ha poli in $s=0$

$$K_F = K' \frac{\prod(-z_j)}{\prod(-p_i)}$$

$$F(s) = K' \frac{n(s)}{d(s)}$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{K' n(s)}{d(s) + K' n(s)}$$

deg m

deg n

$$\text{den}\, W(s) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) + K' \prod_{j=1}^{m}(s-z_j) \overset{!}{=} 0}_{\text{equazione caratteristica del LUOGO DELLE RADICI}}$$

$$\boxed{f(s, K') = 0}$$

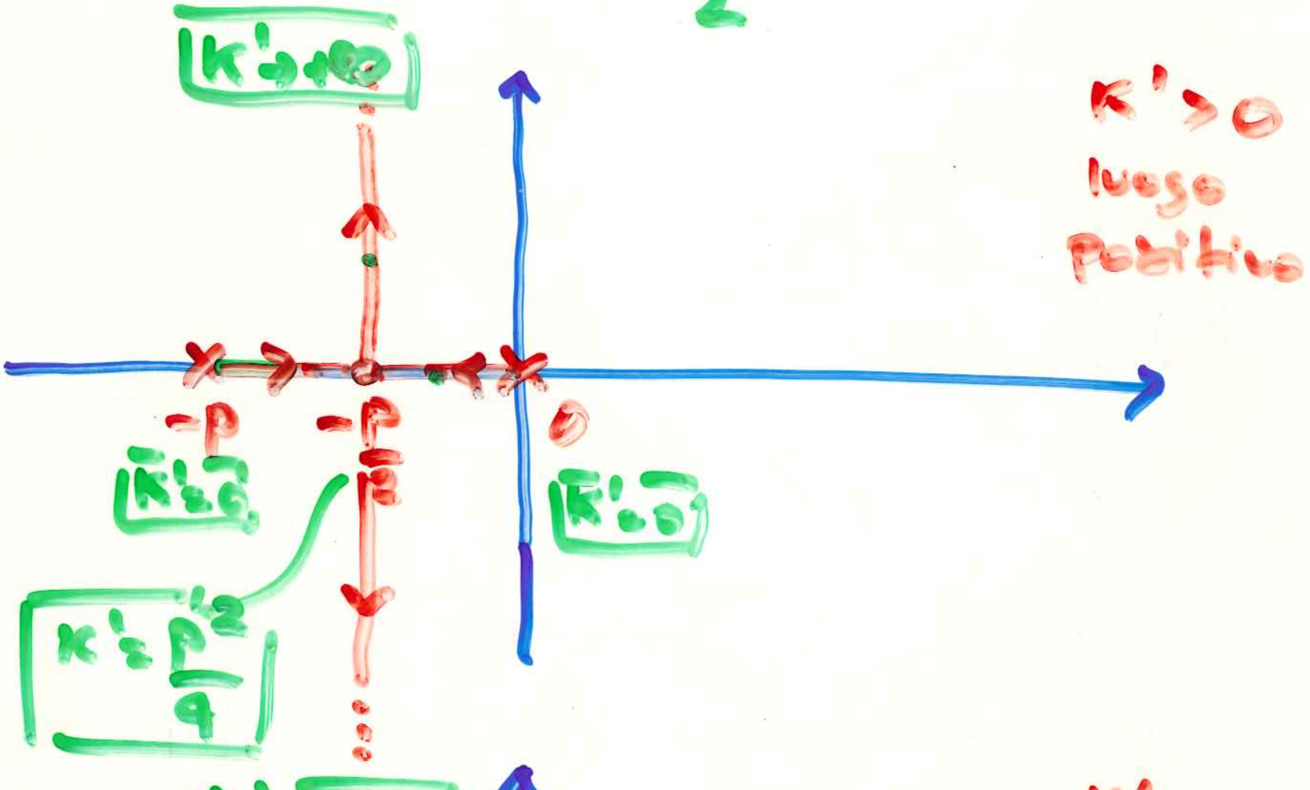
$K' \in \mathbb{R}$

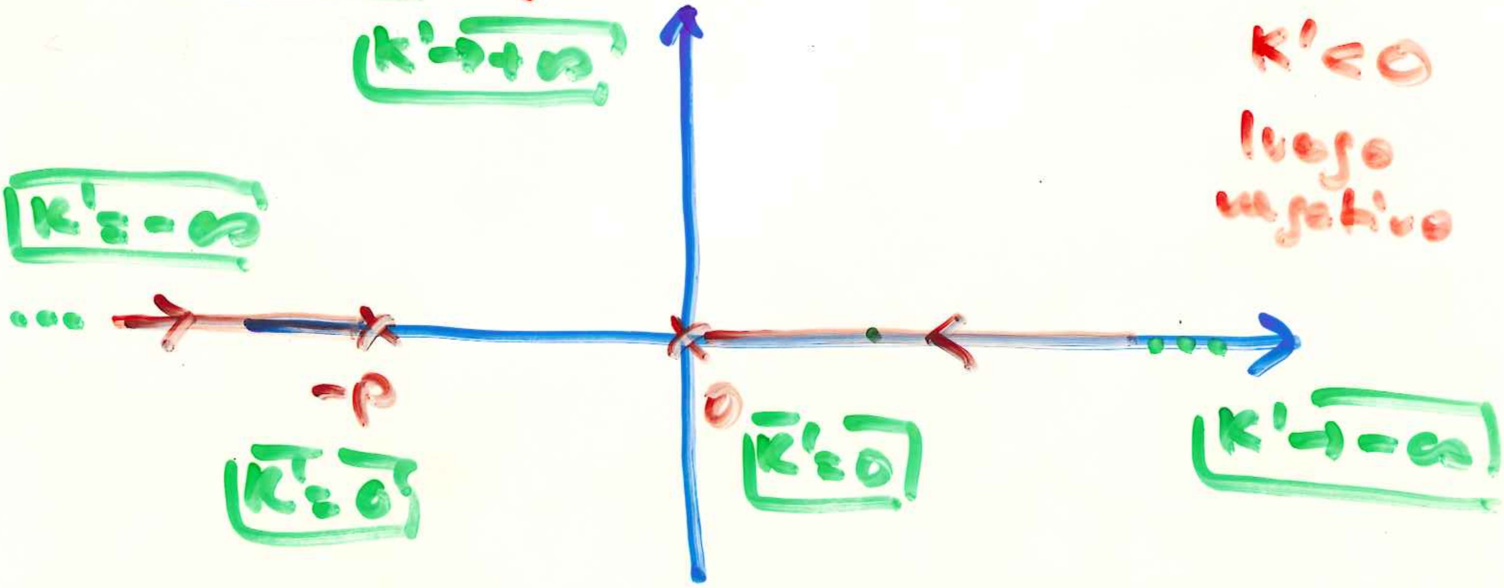
Ex

$$F(s) = \frac{K'}{s(s+p)} \qquad p > 0$$

$$f(s, K') = s(s+p) + K' = 0$$

$$s_{1,2}(K') = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4K'}}{2}$$





Condizioni di definizione del luogo

$$f(s,k') = \prod(s-p_j) + k'\prod(s-z_i) = 0$$

$$\hookrightarrow \prod(s-p_j) = -k'\prod(s-z_i)$$

i) MODULI

$$\prod|s-p_j| = |k'|\prod|s-z_i|$$

$$\hookrightarrow |k'| = \frac{\prod|s-p_j|}{\prod|s-z_i|}$$ → "graduazione" del luogo

ii) FASI

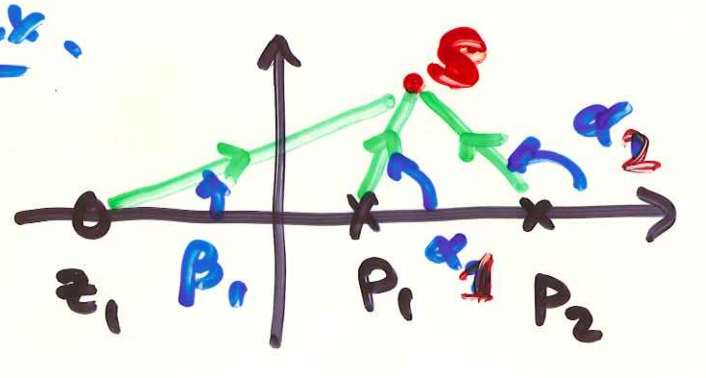
$$\sum \angle s-p_j = \pi + \angle k' + \sum \angle s-z_i + h2\pi$$

$\angle k' \hookrightarrow \begin{cases} 0 & k'>0 \\ \pi & k'<0 \end{cases}$ $h2\pi \rightarrow$ (mod 2π)

$$\sum \angle s-p_j - \sum \angle s-z_i = \begin{cases} \pi + 2\pi \cdot h & k'>0 \\ 2\pi \cdot h & k'<0 \end{cases}$$

↳ "tracciamento" del luogo

ex.



$s \in$ L. Positivo iff

$\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 = \pi$ (mod 2π)

Regole per il tracciamento (qualitativo) del luogo delle radici

N.B. il tracciamento esatto si fa numericamente ad es. con MATLAB: rlocus(n,d).

$$f(s,k') = \prod(s-p_i) + k'\prod(s-z_i) = 0$$

eq. polinomiale di grado n (parametrica rispetto a k')

n radici $\underbrace{s = s(k')}$

$$\bar{k}' \rightarrow \bar{s}_1(\bar{k}'), \; \dots, \; \bar{s}_n(\bar{k}')$$

Th. Funzione implicita

if $\left.\dfrac{\partial f}{\partial s}\right|_{\substack{s=\bar{s}\\ k'=\bar{k}'}} \neq 0 \Rightarrow \bar{s}$ è un punto REGOLARE del luogo

else $\bar{s}$ è un punto SINGOLARE

a) luogo è SIMMETRICO rispetto all'asse reale

<u>dim.</u> ? $f(s, k')$ è un eq. pol. a <u>coeff. reali</u> ($\forall k' \in \mathbb{R}$)

b) poli p_j di $F(s)$ sono radici per $k' = 0$

c) asse reale è sempre al luogo

<u>dim.</u> $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f(\alpha, k') = 0$

$$k' = -\frac{\prod(\alpha - p_j)}{\prod(\alpha - z_i)} \in \mathbb{R} \;!!$$

d) luogo positivo : punti reali con a <u>dx</u> un # <u>dispari</u> di poli/zeri* di F

luogo negativo : punti reali con a <u>dx</u> un # <u>pari</u> di poli/zeri* di F

<u>dim.</u> applicazione della condizione di fase

* basta valutare quelli <u>reali</u>

e) per $k' \to \pm\infty$

m rami (radici) $\longrightarrow$ zeri $z_1 \dots z_m$ della F

$n-m$ rami $\longrightarrow$ punto improprio di $\mathbb{C}$

(n radici) secondo direzioni asintotiche

dim. $f(s, k') = d(s) + k' n(s) = 0$

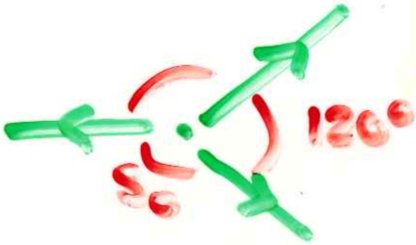
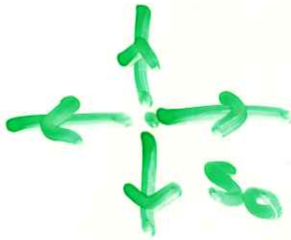
il resto "analisi complessa"

f) $\exists\, s_0 \in \mathbb{R}$ centro degli asintoti

$$s_0 = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m} \qquad n-m \geq 2$$

(

gli asintoti partizionano in modo regolare l'angolo giro

n-m	$K'>0$ $(\to +\infty)$	$K'<0$ $(\to -\infty)$
1		 N.B. versi !!
2		
3		
4		
...	$\varphi^+ = \dfrac{\pi + 2\pi h}{n-m}$	$\varphi^- = \dfrac{2\pi h}{n-m}$

dim: per $|K'| \to +\infty$

n-m soluzioni del luogo $\simeq (s - s_0)^{n-m} + K' = 0$

9) punti singolari

$$\begin{cases} f(s,k')=0 \quad (*) \\ \frac{df}{ds}(s,k')=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$s(k')$ è una radice di molteplicità $\mu \geq 2$

radice doppia di $(*)$ = p. singolare semplice
" tripla " = " doppio
" quadrupla " = " triplo

$$f(s,k') = \prod(s-p_i) + k' \prod(s-z_i)$$
$$= D(s) + k' N(s) = 0$$

$$\frac{df}{ds}(s,k') = \frac{dD}{ds} + k' \frac{dN}{ds} = 0$$

$$\hookrightarrow k' = \frac{-dD/ds}{dN/ds}$$

$$\Rightarrow \underbrace{D(s)}_{n} \cdot \underbrace{\frac{dN(s)}{ds}}_{m-1} - \underbrace{N(s)}_{m} \cdot \underbrace{\frac{dD(s)}{ds}}_{n-1} = 0$$

} eq. pol. di grado $\leq n+m-1$

$\Rightarrow$ ci sono <u>al più</u> $n+m-1$ p. singolari !!

in pratica, la presenza di punti singolari si dedurre dall'andamento e/o dall'ispezione del luogo stesso!!

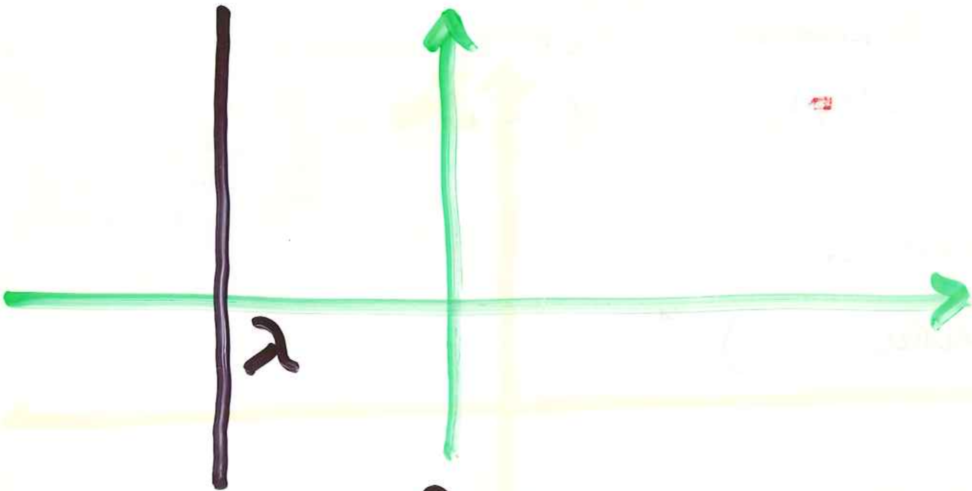
h) in un punto singolare (radice di **molteplicità $\mu \geq 2$** della $f(s,k')=0$) si ha confluenza di 2μ rami del luogo ALTERNATIVAMENTE convergenti e divergenti

i) verso del luogo va da $-\infty$ a $+\infty$.

f) criterio di Routh per trovare i valori di k' in corrispondenza ai quali c'è attraversamento (di almeno un ramo del luogo) dell'asse immaginario

⇒ intervalli di ASINTOTICA STABILITÀ (della W(s)) per k'

f')



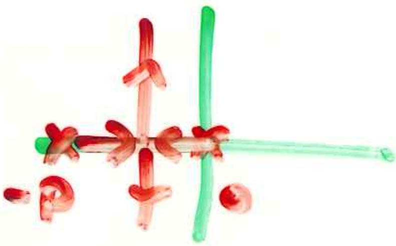
Routh su $f(s+\lambda, k')$

Routh su $f(s, k')$

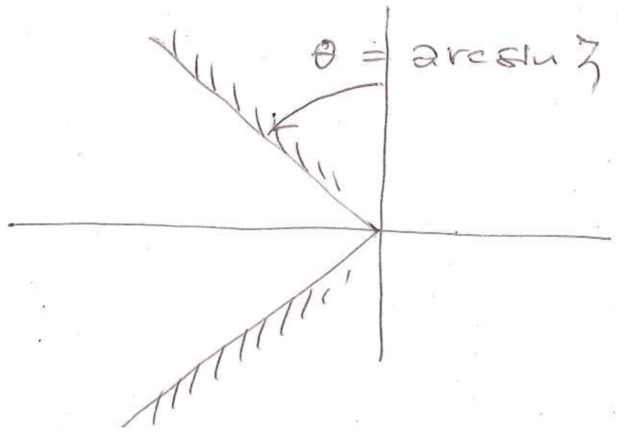
ex. $f(s,k') = s(s+p)+k'$

$\downarrow$

$(s+\lambda)(s+\lambda+p)+k'$



e'') criterio di Routh per individuare l'attraversamento dei limiti del settore del piano $\mathbb{C}$ a ζ costante



$\theta = \arcsin \zeta$ (e.g. per $\zeta = 0{,}5$ $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$)

per le radici del polinomio $d_w(s)$

$\Rightarrow$ si applica il criterio al polinomio modificato

$$d_w(s e^{j\theta}) \cdot d_w(s e^{-j\theta}) = d_w^*(s)$$

ex $\quad F(s) = \dfrac{K'}{s(s+1)} \qquad f(s, K') = d_w(s) = s(s+1) + K'$

$$= s^2 + s + K'$$

$$d_w^*(s) = \left[(s e^{j\theta})^2 + (s e^{j\theta}) + K' \right] \left[(s e^{-j\theta})^2 + (s e^{-j\theta}) + K' \right]$$

$$= s^4 + 2\cos\theta\, s^3 + (1 + 2\cos 2\theta \cdot K') s^2$$

$$+ 2\cos\theta\, K' s + K'^2$$

essendo $\quad \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta$

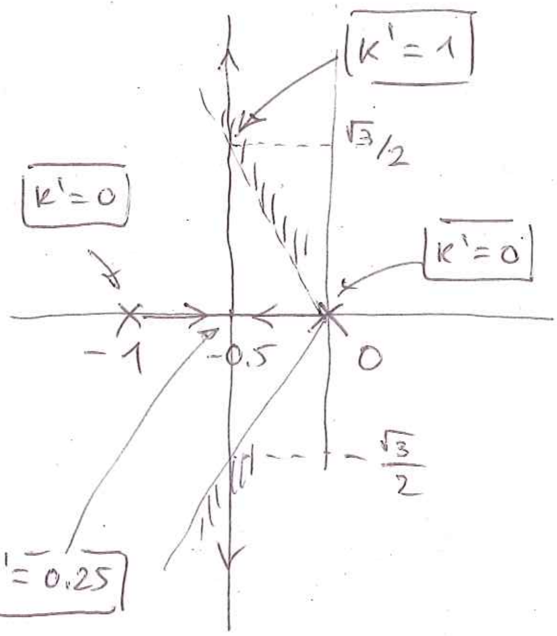
ad esempio con $\theta = \pi/6$ $\rightarrow$ $\cos\theta = \sqrt{3}/2$

$\cos 2\theta = 1/2$

$$d_w^*(s) = s^4 + \sqrt{3}\, s^3 + (1+k')\, s^2 + \sqrt{3}\, k' s + k'^2$$

1	$1+k'$	k'^2
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}\,k'$	
1	k'^2	
$\sqrt{3}(k'-k'^2)$		
k'^2		

$\sqrt{3}(k'-k'^2) > 0 \iff 0 < k' < 1$



$d_w(s) = s^2 + s + k' = 0$

$\downarrow$

$$s_{1,2}(k') = -0.5 \pm \frac{\sqrt{1-4k'}}{2}$$

per $k' = 1$

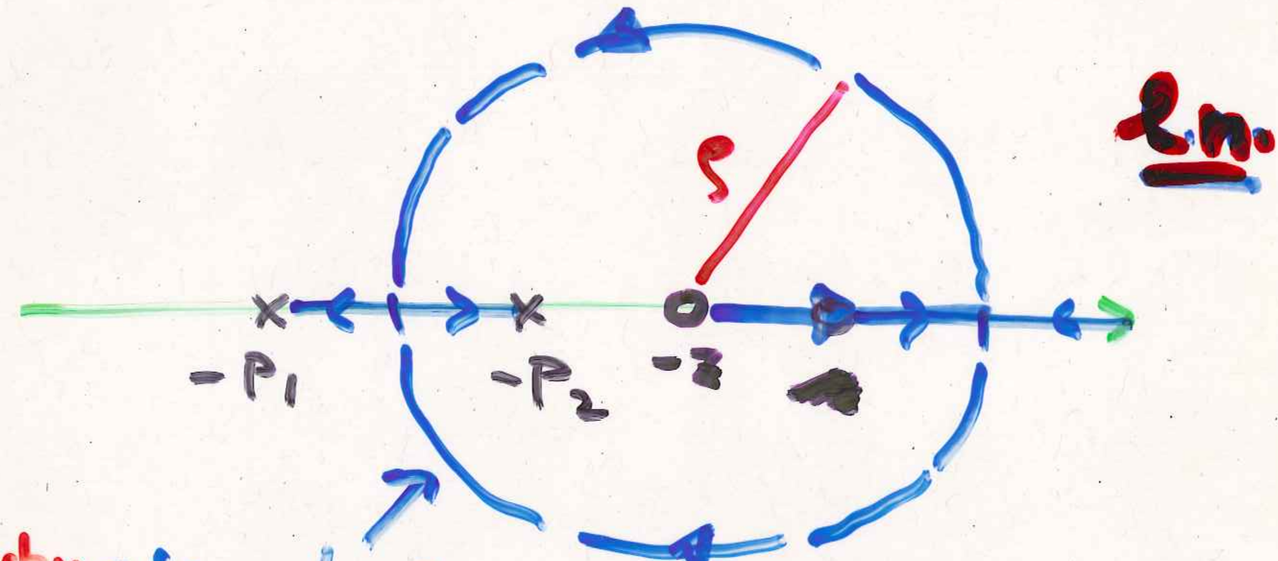
$\ldots = -0.5 \pm j\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ex (a casa)

i) $P(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2+z^2}{s^2+p^2}$ $\qquad 0<z<p$

ii) " " $\qquad 0<p<z$

iii) $P(s) = \frac{s+z}{(s+p_1)(s+p_2)}$ $\qquad z, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$



dimostrare circonferenza di centro e raggio funzioni ESPLICITE di $p_1\ p_2\ z$

$\rho = \sqrt{|p_1-z||p_2-z|}$

↳ $\boxed{\text{in } -z}$!!

iv) indicare le difficoltà che si incontrano nel luogo delle radici per F(s) PROPRIA (n=m)